Girona

Modelització de decisions i sistemes de presa de decisions*

Vicenç Torra[1]

Maig, 2012

[1] Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial (IIIA-CSIC)

*V. Torra, Y. Narukawa (2007) Modelització de decisions: fusió d'informació i operadors d'agregació. Edicions UAB

Índex

- Presa de decisions
  - Introducció
  - MCDM i elecció social
  - Preferències
  - Utilitats
  - Agregació: introducció

Introducció

- Presa de decisions:
  - Triar entre diverses alternatives.
- Exemple:
  - Volem comprar un cotxe, i hi ha diversos models.
  - Alternatives: $\{Peugeot308, FordT., \ldots\}$

Introducció

- Multicriteria Decision Aid (MCDA) i
  Multicriteria Decision Making (MCDM)
  - Ofereixen eines per ajudar en la presa de decisions.
  - Dificultat del problema:
    - Hi ha diverses alternatives
    - Cal tenir en compte diversos punts de vista o criteris (sovint contradictoris)

Introducció

- Multicriteria Decision Aid (MCDA) i
  Multicriteria Decision Making (MCDM)
  - Ofereixen eines per ajudar en la presa de decisions.
  - Dificultat del problema:
    - Hi ha diverses alternatives
    - Cal tenir en compte diversos punts de vista o criteris (sovint contradictoris)
  - MCDA: Es donen eines per capturar, entendre i analitzar les diferències (punt de vista constructivista)
  - MCDM: Es donen eines per descriure el procés de decisió. Es suposa que es pot formalitzar el procés de decisió (punt de vista descriptiu)

Introducció

- L'exemple de la compra del cotxe:
  - Alternatives: $\{Peugeot308, FordT., \ldots\}$
  - Punts de vista/criteris: Preu, Qualitat, Confort
- MCDA: Es donen eines per capturar, entendre i analitzar les diferències
- MCDM: Es donen eines per descriure el procés de decisió.

Introducció: MCDM

- El procés descriptiu es formula en termes matemàtics.
  - Funcions d'utilitat.
    - Cal disposar d'una funció per a cada criteri.
    - La funció s'aplica a cada alternativa.
    - La funció retorna un valor més gran per a les alternatives que satisfan millor el criteri.
  - Relacions de preferències (comparació entre les diverses alternatives)
    - Cal disposar d'una relació binària per a cada criteri.
    - Cada relació ens ordena les alternatives segons el criteri considerat.

Introducció

- L'exemple de la compra del cotxe:
  - Alternatives: $\{Peugeot308, FordT., \ldots\}$
  - Punts de vista/criteris: Preu, Qualitat, Confort
- Formalització:
  - Funció d'utilitat (U):
    - Ford T: $U_{preu} = 0.2$, $U_{qualitat} = 0.8$, $U_{confort} = 0.3$
    - Peugeot308: $U_{preu} = 0.7$, $U_{qualitat} = 0.7$, $U_{confort} = 0.8$
  - Relacions de preferència (R)
    - $\mathbf{R}_{preu}$: $R_{preu}(P308, FordT)$, $\neg R_{preu}(FordT, P308)$
    - $\mathbf{R}_{qualitat}$: $\neg R_{qualitat}(P308, FordT)$, $R_{qualitat}(FordT, P308)$
    - $\mathbf{R}_{confort}$: $R_{confort}(P308, FordT)$, $\neg R_{confort}(FordT, P308)$

Introducció

- En el marc de MCDA o MCDM es distingueixen dues àrees:
  - MODM (Multi-Objective Decision Making): correspon a la situació amb un nombre infinit d'alternatives (espais d'alternatives continu).
  - MADM (Multi-Attribute Decision Making): correspon a la situació en que el nombre d'alternatives és petit
    $\longrightarrow$ Sovint s'entén MCDM com a sinònim de MADM.
    - L'exemple de la tria de cotxes: un problema MADM/MCDM

MODM (multi-objective decision making): aquests problemes es formulen normalment mitjançant problemes d'optimització, i es resolen amb mètodes de programació matemàtica (tipus SIMPLEX). S'han aplicat també altres tècniques com ara els algorismes genètics.

MCDM i elecció social

MCDM i elecció social

- MCDM (decisió) i l'elecció social.
  $\Rightarrow$ són dues àrees relacionades.

MCDM i elecció social

- L'elecció social (social choice)
  - estudia regles de votació, i com les preferències d'un conjunt de gent es poden agregar (combinar) per obtenir la preferència del conjunt.
- Tot i que en l'elecció social estem construint una preferència global a partir d'opinions de persones en lloc de criteris, des d'un punt de vista formal no hi ha gaire diferència entre els dos casos[1].
  - Les persones no *decideixen*, només expressen les seves **preferències**
- Així, (*informalment*)
  - l'elecció social *ignora* les persones
  - l'elecció social *només* estudia com *agregar* les preferències i construir la preferència composta

[1] A. Rapoport, Decision Theory and Decision Behaviour, Kluwer Academic Publishers, 1989. p. 5

MCDM i elecció social

- Regla de la majoria (elecció social vs. MCDM):
  - L'alternativa seleccionada és la preferida per la majoria de gent.
  - L'alternativa seleccionada és la que guanya en tots els criteris.

MCDM i elecció social

- Exemple (de MCDM/presa de decisions):
  - El Peugeot 308 és millor en quant a preu i a confort (guanya 2 vegades)
  - El Ford T només és millor en qualitat (guanya 1 vegada)

  $\rightarrow$ Guanya el Peugeot 308

- Exemple (d'elecció social)
  - Una familia de 3 membres $\{p, q, c\}$ volen comprar un cotxe
    - p prefereix el Peugeot 308
    - q prefereix el Ford T
    - c prefereix el Peugeot 308
  - Fan una votació (cadascú vota el que prefereix):
    - guanya l'opció Peugeot 308.

MCDM i elecció social

- Regla de la majoria (elecció social vs. MCDM):
  - L'alternativa seleccionada és la preferida per la majoria de gent.
  - L'alternativa seleccionada és la que guanya en tots els criteris.
- En aquesta regla només considerem l'alternativa més preferida (per a cada criteri), però no com estan *ordenades* les altres opcions.

MCDM i elecció social

- Donades les preferències, com construir l'agregació?
  - Formalització de les preferències amb $>$ i $=$ (preferència, indiferència)
  - $F(R_1, R_2, \ldots, R_N)$ per denotar la preferència agregada

MCDM i elecció social

- Donades les preferències, com construir l'agregació?
  - Formalització de les preferències amb $>$ i $=$ (preferència, indiferència)
  - $F(R_1, R_2, \ldots, R_N)$ per denotar la preferència agregada
    - Dificultats (I): considerem
      - $R^1 : x > y > z$
      - $R^4 : y > z > x$
      - $R^5 : z > x > y$

      $\rightarrow$ regla de la majoria simple: $u > v$ si la majoria prefereix u a v
      - $x > y, y > z, z > x$ (rel. intransitiva: $x > y, y > z$ però no $x > z$)
    - Dificultats (II):

      $\rightarrow$ Teorema d'impossibilitat d'Arrow

MCDM i elecció social

- Donades les preferències, com construir l'agregació?
  - Formalització de les preferències amb $>$ i $=$ (preferència, indiferència)
  - $F(R_1, R_2, \ldots, R_N)$ per denotar la preferència agregada

MCDM i elecció social

- Donades les preferències, com construir l'agregació?
  - Formalització de les preferències amb $>$ i $=$ (preferència, indiferència)
  - $F(R_1, R_2, \ldots, R_N)$ per denotar la preferència agregada
    - Solucions
      - Regla de Copeland (variació de Condorcet)[2]:
      - Regla de Borda[3]

[2] La regla de Condorcet amb el desempat de Copeland va ser definit per Ramon Llull (s. XIII) en diversos treballs. Per exemple, a la novel·la Blanquerna.

[3] Nicolau de Cusa va introduir la regla de Borda el s. XV.

Utilitats

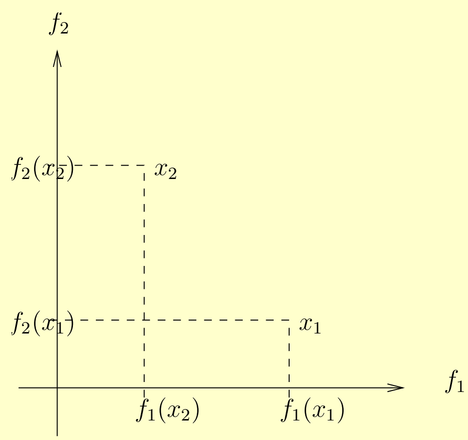
Utilitats

- Problema MADM/MCDM amb utilitats
  - Dificultat: el tenir en compte els punts de vista contradictoris
  - Solució: Les utilitats ens permeten expressar aquests punts de vista (contradictoris)
    $\Rightarrow U_i(alternativa)$

Utilitats

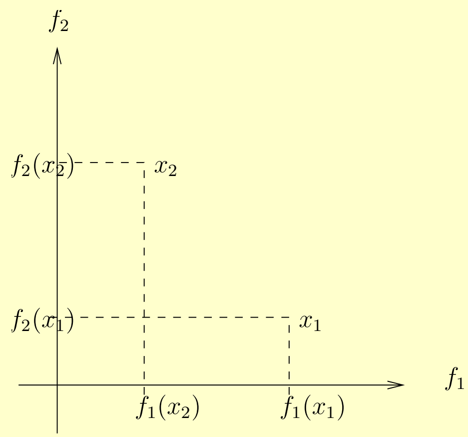
- Problema MADM/MCDM amb utilitats
  - Dificultat: el tenir en compte els punts de vista contradictoris
  - Dificultat: el que te una alternativa de bo en un criteri, ho te de dolent en un altre; i tenim una alternativa amb comportaments inversos

- Es diu que una situació és òptim de Pareto (o Pareto-eficient) quan no és possible que ningú hi obtingui un guany superior sense que hi perdi algú altre.



Utilitats

- Problema MADM/MCDM amb utilitats
  - Dificultat: el tenir en compte els punts de vista contradictoris
  - Dificultat: el que te una alternativa de bo en un criteri, ho te de dolent en un altre; i tenim una alternativa amb comportaments inversos
- com *ordernar* les alternatives òptim de Pareto o Pareto-eficient ?



Utilitats

- Solució d'un problema MADM/MCDM amb utilitats

  Opció 1: Construim relacions, i treballem amb preferències (cas anterior: MCDM i elecció social)

  Opció 2:

  - **Agreguem** els graus de satisfacció/utilitat
  - Ordenem les alternatives segons els graus de satisfacció
    $\longrightarrow$ seleccionem l'alternativa (o el conjunt d'alternatives) millor

Criteria
Satisfaction on:

alt	Price	Quality	Comfort
FordT	0.2	0.8	0.3
206	0.7	0.7	0.8
...	...		

$\Longrightarrow$

alt	Consensus
FordT	0.35
206	0.72
...	...

$\Longrightarrow$

alt	Ranking
206	0.72
FordT	0.35
...	...

Opció 2:

- **Agreguem** els graus de satisfacció/utilitat
- Ordenem les alternatives segons els graus de satisfacció

Agregacions:

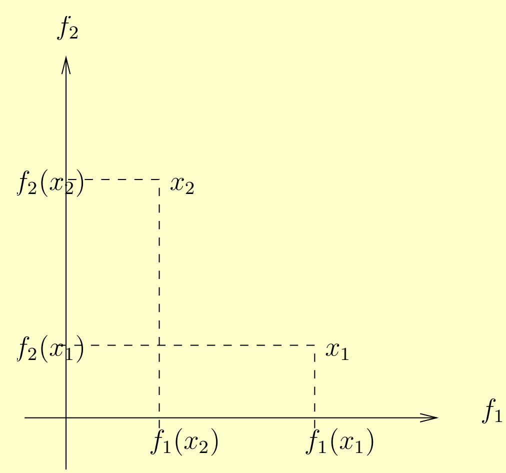
- Agregacions diferents, donen ordenacions diferents
- Les agregacions estableixen quins punts són *equivalents*
- Agregacions diferents, estableixen corbes de punts diferents

Criteria Satisfaction on:

alt	Price	Quality	Comfort
FordT	0.2	0.8	0.3
206	0.7	0.7	0.8
...	...		

alt	Consensus
FordT	0.35
206	0.72
...	...

alt	Ranking
206	0.72
FordT	0.35
...	...



Agregació: introducció

Agregació: Introducció

- L'agregació o fusió d'informació:
  - En el nostre cas, com combinar els valors associats als criteris
- En general,
  - tota una àrea de recerca, amb aplicacions molt diverses
- Exemples de funcions d'agregació:
  - $\sum_{i=1}^{N} a_i/N$ (mitjana aritmètica, AM arithmetic mean)
  - $\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot a_i$ (mitjana ponderada, WM weighted mean)
- Naturalment, funcions diferents donen resultats diferents
  - En el nostre cas, funcions diferents donen ordenacions diferents!

Agregació: Introducció

- Objectiu de l'agregació (no només per MCDM):
  - Produir una dada específica, i a la vegada exhaustiva, sobre una entitat.
  - Aquesta dada es construeix a partir de les informacions subministrades per diverses fonts d'informació (o per la mateixa font a partir d'informació recollida en diversos instants de temps).
  - Aquestes tècniques s'empren per reduir algun tipus de soroll, incrementar la precisió, resumir la informació, extreure informació, prendre decisions, etc.

Agregació: Introducció

- La fusió d'informació estudia ...

  ... tots els aspectes relacionats amb la combinació d'informació:

- Objectius de l'agregació (*objectius de l'àrea*):
  - Formalització del procés d'agregació
    - Definició de noves funcions
    - Selecció de funcions

      (mètodes per decidir quina és la funció més apropiada en una situació donada)
    - Determinació dels paràmetres
  - Estudi dels mètodes existents:
    - Caracterització de funcions
    - Determinació de les capacitats de modelització de les funcions
    - Relació entre operadors i paràmetres

      (per saber com els paràmetres afecten el resultat: es pot aconseguir la propietat de dictador?, sensibilitat a les dades $\rightarrow$ índex).

Agregació: Introducció

- Termes:
  - Integració d'informació
  - Fusió d'informació: funcions/tècniques concretes:
    el procés concret de combinar diverses dades per obtenir-ne una de sola.
  - Operadors d'agregació: $\mathbb{C} : D^N \to D$ ($\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$onsens)
    $\to$ i $\mathbb{C}$ amb paràmetres (coneixement de base): $\mathbb{C}_P$
- Agregació:
  - Unanimitat o idempotència: $\mathbb{C}(a, \ldots, a) = a$ per a tot a
  - Monotonia: $\mathbb{C}(a_1, \ldots, a_N) \geq \mathbb{C}(a'_1, \ldots, a'_N)$ quan $a_i \geq a'_i$
  - Simetria: Per a qualsevol permutació π sobre $\{1, \ldots, N\}$
    $\mathbb{C}(a_1, \ldots, a_N) = \mathbb{C}(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(N)})$
  - Unanimitat + monotonia $\to$ internalitat:
    $\min_i a_i \leq \mathbb{C}(a_1, \ldots, a_N) \leq \max_i a_i$

Agregació: Introducció

Definició:

- Definició a partir de propietats

  $\boxed{\text{propietats}} \longrightarrow \boxed{\text{funció}}$

- Definició heurística

  $\boxed{\text{propietats}} \longleftarrow \boxed{\text{funció}}$

- Definició a partir d'exemples

  $\boxed{\text{exemples}} \longrightarrow \boxed{\text{funció}}$

Agregació: Introducció

- Definició a partir de propietats

$$\boxed{\text{propietats}} \longrightarrow \boxed{\text{funció}}$$

Agregació: Introducció

- Definició a partir de propietats

$$\boxed{\text{propietats}} \longrightarrow \boxed{\text{funció}}$$

- Algunes definicions

  a) Emprant equacions funcionals

Agregació: Introducció

- Definició a partir de propietats

$$\boxed{\text{propietats}} \longrightarrow \boxed{\text{funció}}$$

- Algunes definicions

  a) Emprant equacions funcionals

  b) Agregació de a_1, a_2, $\ldots$, $a_N \in D$, com el c situat a la mínima distància dels a_i:

$$\mathbb{C}(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \arg\min_c \{\sum_{a_i} d(c, a_i)\},$$

  d és una distància sobre D.

Agregació: Introducció

- Exemple (cas (a)): Equacions funcionals
  - repartir s euros entre m projectes segons l'opinió de N experts

	Proj 1	Proj 2	$\cdots$	Proj j	$\cdots$	Proj m
E_1	x_1^1	x_2^1	$\cdots$	x_j^1	$\cdots$	x_m^1
E_2	x_1^2	x_2^2	$\cdots$	x_j^2	$\cdots$	x_m^2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
E_i	x_1^i	x_2^i	$\cdots$	x_j^i	$\cdots$	x_m^i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
E_N	x_1^N	x_2^N	$\cdots$	x_j^N	$\cdots$	x_m^N
DM	$f_1(\mathbf{x_1})$	$f_2(\mathbf{x_2})$	$\cdots$	$f_j(\mathbf{x_j})$	$\cdots$	$f_m(\mathbf{x_m})$

Agregació: Introducció

- La solució general del sistema (Proposició 3.11)

$$f_j : [0, s]^N \to \mathbb{R}^+ \text{ for } j = \{1, \cdots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{x}_j = \mathbf{s} \text{ implies that } \sum_{j=1}^{m} f_j(\mathbf{x}_j) = s \quad (2)$$

$$f_j(\mathbf{0}) = 0 \text{ for } j = 1, \cdots, m \quad (3)$$

for a given $m > 2$ is given by

$$f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = \cdots = f_m(\mathbf{x}) = f((x_1, x_2, \ldots, x_N)) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i,$$

where $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ are nonnegative constants satisfying $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, but are otherwise arbitrary.

Agregació: Introducció

- Exemple (cas (b)): Considerem l'expressió següent:

$$\mathbb{C}(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \arg\min_c \{\sum_{a_i} d(c, a_i)\},$$

on els a_i són nombre de $\mathbb{R}$ i d és una distància sobre D. Aleshores,

1. Quan $d(a,b) = (a-b)^2$, $\mathbb{C}$ és la mitjana aritmètica.
   Això és, $\mathbb{C}(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \sum_{i=1}^N a_i/N$.
2. Quan $d(a,b) = |a-b|$, $\mathbb{C}$ és la mediana.
   Això és, la mediana de $a_1, a_2, \ldots, a_N$ és l'element que ocupa la posició central quan ordenem els elements a_i.
3. Quan $d(a,b) = 1$ sii $a = b$, $\mathbb{C}$ és la regla de pluralitat (moda o votació).
   Això és, $\mathbb{C}(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ selecciona l'element de $\mathbb{R}$ que trobem més sovint entre els elements de $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$.

Agregació:

de la mitja ponderada a les integrals difuses

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.**

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.**

  A i B imparteixen un curs (teoria+pràctica) i tenen algunes restriccions:

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.**

  A i B imparteixen un curs (teoria+pràctica) i tenen algunes restriccions:

  – El nombre total de sessions és sis.

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.**

  A i B imparteixen un curs (teoria+pràctica) i tenen algunes restriccions:

  – El nombre total de sessions és sis.

  – El professor A donarà la part de teoria, que hauria de consistir en unes tres sessions. Tres és el valor òptim, i una diferència entre el nombre de sessions més gran que dues és inacceptable.

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.**

  A i B imparteixen un curs (teoria+pràctica) i tenen algunes restriccions:

  – El nombre total de sessions és sis.

  – El professor A donarà la part de teoria, que hauria de consistir en unes tres sessions. Tres és el valor òptim, i una diferència entre el nombre de sessions més gran que dues és inacceptable.

  – El professor B donarà la part de problemes, que consisteix en dues sessions.

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.**

  A i B imparteixen un curs (teoria+pràctica) i tenen algunes restriccions:

  – El nombre total de sessions és sis.

  – El professor A donarà la part de teoria, que hauria de consistir en unes tres sessions. Tres és el valor òptim, i una diferència entre el nombre de sessions més gran que dues és inacceptable.

  – El professor B donarà la part de problemes, que consisteix en dues sessions.

  – Els dos professors han de donar, més o menys, el mateix nombre de sessions. Una diferència d'una o dues és mitjanament acceptable, però una diferència de tres és inacceptable.

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

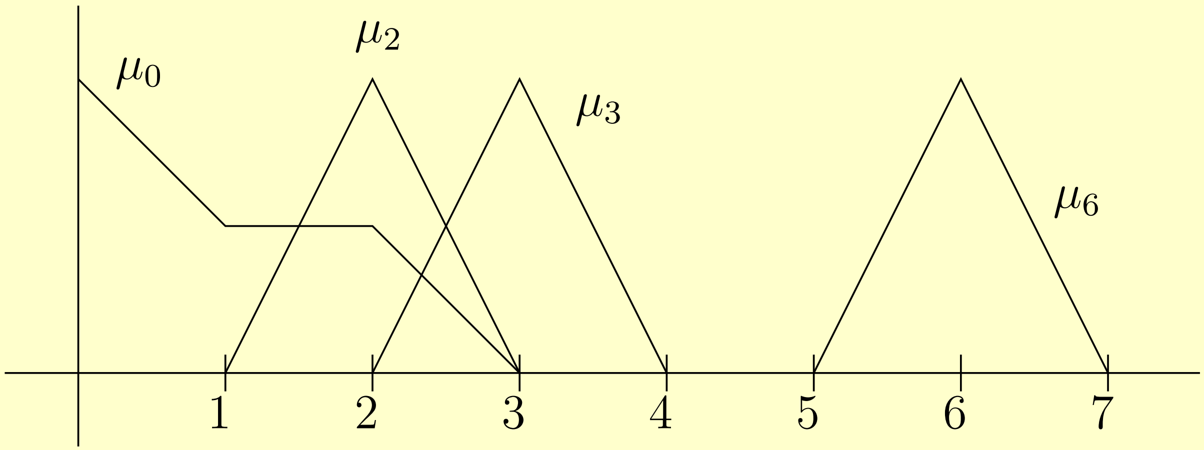
- **Exemple.** Formalització
  - Variables
    - x_A: nombre de sessions impartides pel professor A
    - x_B: nombre de sessions impartides pel professor B.
  - Restriccions
    - C_1: $x_A + x_B$ ha de ser al voltant de 6
    - C_2: x_A ha de ser al voltant de 3
    - C_3: x_B ha de ser al voltant de 2
    - C_4: $|x_A - x_B|$ ha de ser al voltant de zero.
  - Les restriccions es descriuen mitjançant conjunts difusos ...

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.** Formalització
  - si μ_6 expressa "al voltant de 6", aleshores avaluem "$x_a + x_B$ ha de ser al voltant de 6" per $\mu_6(x_A + x_B)$.
    $\longrightarrow$ donats $\mu_6, \mu_3, \mu_2, \mu_0$.
  - Aleshores, donat un parell (x_A, x_B) (una solució possible), obtenim els graus de satisfacció següents:
    * $\mu_6(x_A + x_B)$
    * $\mu_3(x_A)$
    * $\mu_2(x_B)$
    * $\mu_0(|x_A - x_B|)$.

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.** Formalització
  - Funcions de pertinença per a les restriccions.



Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.** Formalització

alternativa	Graus de satisfacció	graus de satisfacció			
(x_A, x_B)	$(\mu_6(x_A + x_B),\ \mu_3(x_A),\ \mu_2(x_B),\ \mu_0(\lvert x_A - x_B\rvert))$	C_1	C_2	C_3	C_4
$(2, 2)$	$(\mu_6(4),\ \mu_3(2),\ \mu_2(2),\ \mu_0(0))$	0	0.5	1	1
$(2, 3)$	$(\mu_6(5),\ \mu_3(2),\ \mu_2(3),\ \mu_0(1))$	0.5	0.5	0.5	0.5
$(2, 4)$	$(\mu_6(6),\ \mu_3(2),\ \mu_2(4),\ \mu_0(2))$	1	0.5	0	0.5
$(3.5, 2.5)$	$(\mu_6(6),\ \mu_3(3.5),\ \mu_2(2.5),\ \mu_0(1))$	1	0.5	0.5	0.5
$(3, 2)$	$(\mu_6(5),\ \mu_3(3),\ \mu_2(2),\ \mu_0(1))$	0.5	1	1	0.5
$(3, 3)$	$(\mu_6(6),\ \mu_3(3),\ \mu_2(3),\ \mu_0(0))$	1	1	0.5	1

Agregació: exemple de selecció d'alternatives

- **Exemple.** Formalització

alternativa	graus de satisfaccio				agregacio			
(x_A, x_B)	C_1	C_2	C_3	C_4	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_3$	$\mathbb{C}_4$
$(2, 2)$	0	0.5	1	1				
$(2, 3)$	0.5	0.5	0.5	0.5				
$(2, 4)$	1	0.5	0	0.5				
$(3.5, 2.5)$	1	0.5	0.5	0.5				
$(3, 2)$	0.5	1	1	0.5				
$(3, 3)$	1	1	0.5	1				

WM, OWA, i WOWA

- Operadors ben coneguts
  (que usen un vector de pesos de dimensió N:
  $$v = (v_1 ... v_N) \text{ on } v_i \in [0,1] \text{ i } \sum_i v_i = 1)$$
  - Arithmetic mean (AM :$\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$): $AM(a_1, ..., a_N) = (1/N)\sum_{i=1}^N a_i$
  - Weighted mean (WM: $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$): $WM_{\mathbf{p}}(a_1, ..., a_N) = \sum_{i=1}^N p_i a_i$
    ($\mathbf{p}$ vector de pesos de dimensió N)
  - Ordered Weighting Averaging operator (OWA: $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$):
    $$OWA_{\mathbf{w}}(a_1, ..., a_N) = \sum_{i=1}^N w_i a_{\sigma(i)},$$
    on $\{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$ és una permutació de $\{1, ..., N\}$ tal que $a_{\sigma(i-1)} \geq a_{\sigma(i)}$, i $\mathbf{w}$ vector de pesos de dimensió N

WM, OWA, i WOWA

Exemple.

- Considerem la situació següent:
  - El professor A és més important que el professor B
  - La restricció més important (però no un requeriment nítid) és que el nombre de sessions sigui 6.
  - La restricció menys important és la relativa a la diferència entre el nombre de sessions impartides pels dos professors

WM amb $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.5, 0.3, 0.15, 0.05)$.

WM, OWA, i WOWA

Exemple.

- WM amb $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.5, 0.3, 0.15, 0.05)$.

alternative	Aggregation of the Satisfaction degrees	WM
(x_A, x_B)	$WM_{\mathbf{p}}(C_1, C_2, C_3, C_4)$	
$(2, 2)$	$WM_{\mathbf{p}}(0, 0.5, 1, 1)$	0.35
$(2, 3)$	$WM_{\mathbf{p}}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	0.5
$(2, 4)$	$WM_{\mathbf{p}}(1, 0.5, 0, 0.5)$	0.675
$(3.5, 2.5)$	$WM_{\mathbf{p}}(1, 0.5, 0.5, 0.5)$	0.75
$(3, 2)$	$WM_{\mathbf{p}}(0.5, 1, 1, 0.5)$	0.725
$(3, 3)$	$WM_{\mathbf{p}}(1, 1, 0.5, 1)$	0.925

WM, OWA, i WOWA

Exemple.

- Compensació: quants criteris poden tenir una avaluació negativa/dolenta
- No passa res per tenir un valor negatiu/dolent: OWA amb $\mathbf{w} = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$ (es descarta el valor més baix)

alternative	Aggregation of the Satisfaction degrees	OWA
(x_A, x_B)	$OWA_{\mathbf{w}}(C_1, C_2, C_3, C_4)$	
$(2, 2)$	$OWA_{\mathbf{w}}(0, 0.5, 1, 1)$	0.8333
$(2, 3)$	$OWA_{\mathbf{w}}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	0.5
$(2, 4)$	$OWA_{\mathbf{w}}(1, 0.5, 0, 0.5)$	0.6666
$(3.5, 2.5)$	$OWA_{\mathbf{w}}(1, 0.5, 0.5, 0.5)$	0.6666
$(3, 2)$	$OWA_{\mathbf{w}}(0.5, 1, 1, 0.5)$	0.8333
$(3, 3)$	$OWA_{\mathbf{w}}(1, 1, 0.5, 1)$	1.0

WM, OWA, i WOWA

A vegades interessa ...

- Importància dels criteris: uns criteris més importants que d'altres
- Compensació: uns certs valors poden no interessar (els extrems, els alts, els baixos)

$\Rightarrow$ Weighted Ordered Weighted Averaging WOWA operator

WM, OWA, i WOWA

- Weighted Ordered Weighted Averaging WOWA operator (WOWA :$\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$):

$$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(a_1, ..., a_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_{\sigma(i)}$$

where

$$\omega_i = w^*(\sum_{j \leq i} p_{\sigma(j)}) - w^*(\sum_{j < i} p_{\sigma(j)}),$$

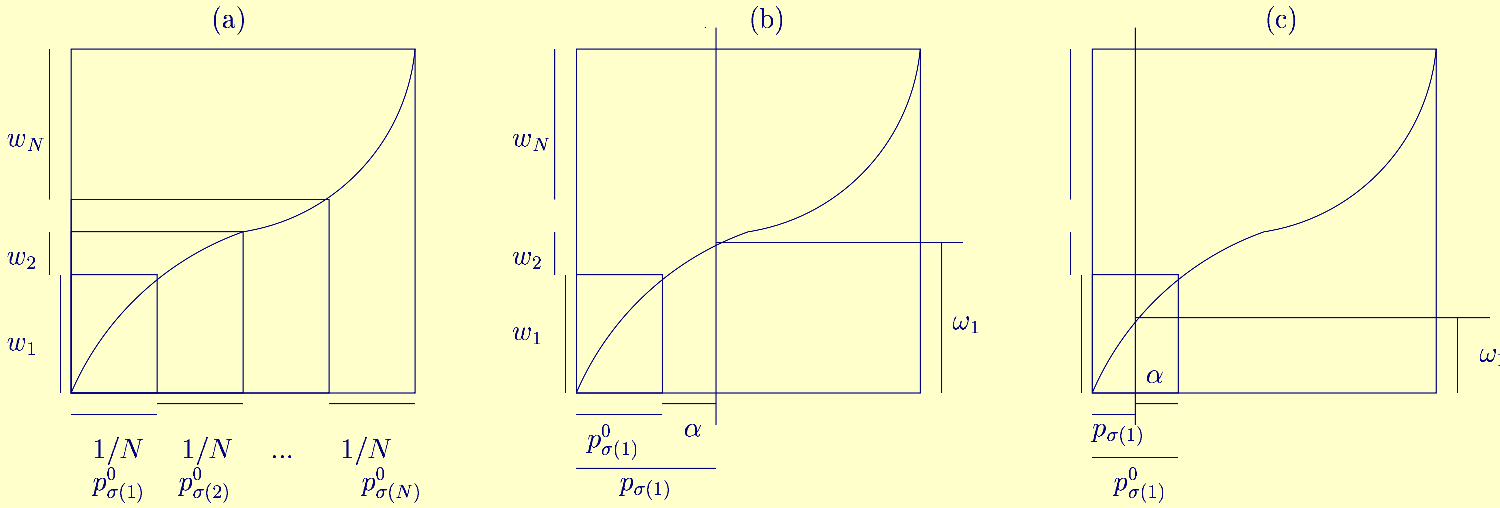
with σ a permutation of $\{1, ..., N\}$ s. t. $a_{\sigma(i-1)} \geq a_{\sigma(i)}$, and w^* a nondecreasing function that interpolates the points

$$\{(i/N, \sum_{j \leq i} w_j)\}_{i=1,...,N} \cup \{(0, 0)\}.$$

w^* is required to be a straight line when the points can be interpolated in this way.

WM, OWA, i WOWA

- Construction of the w^* quantifier



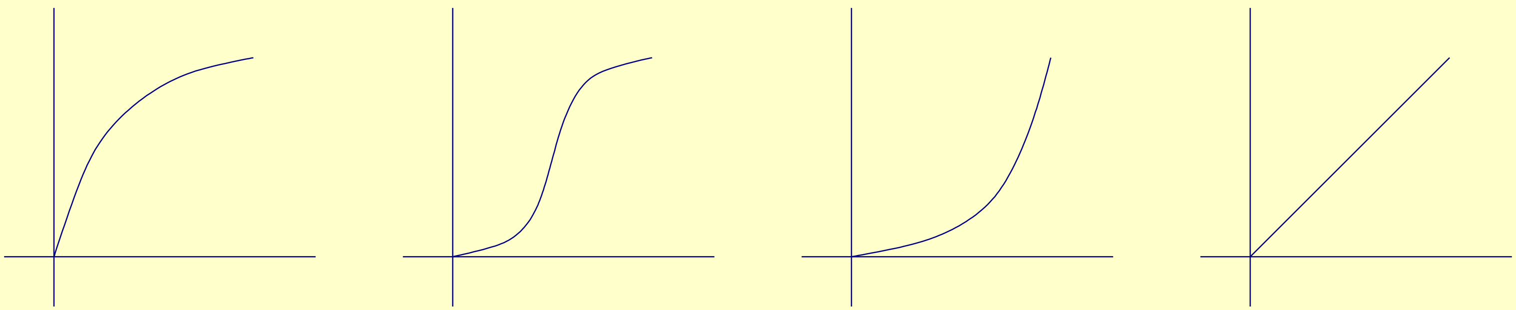
- Rationale for new weights (ω_i, for each value a_i) in terms of $\mathbf{p}$ and $\mathbf{w}$.
  - If a_i is small, and small values have more importance than larger ones, increase p_i for a_i (i.e., $\omega_i \geq p_{\sigma(i)}$).

    (the same holds if the value a_i is large and importance is given to large values)
  - If a_i is small, and importance is for large values, $\omega_i < p_{\sigma(i)}$

    (the same holds if a_i is large and importance is given to small values).

WM, OWA, i WOWA

- La forma de la funció w^* dóna importància
  - (a) als valors grans
  - (b) als valors mitjans
  - (c) als valors petits
  - (d) o dóna la mateixa importància a tots els valors



(a) (b) (c) (d)

WM, OWA, i WOWA

Exemple.

- Importància de les restriccions: $\mathbf{p} = (0.5, 0.3, 0.15, 0.05)$
- Compensació: $\mathbf{w} = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$ (es descarta el valor més baix) $\rightarrow$ WOWA amb $\mathbf{p}$ i $\mathbf{w}$.

alternative	Aggregation of the Satisfaction degrees	WOWA
(x_A, x_B)	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(C_1, C_2, C_3, C_4)$	
$(2, 2)$	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(0, 0.5, 1, 1)$	0.4666
$(2, 3)$	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	0.5
$(2, 4)$	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(1, 0.5, 0, 0.5)$	0.8333
$(3.5, 2.5)$	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(1, 0.5, 0.5, 0.5)$	0.8333
$(3, 2)$	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(0.5, 1, 1, 0.5)$	0.8
$(3, 3)$	$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(1, 1, 0.5, 1)$	1.0

WM, OWA, i WOWA

- Propietats
  - El WOWA generalitza la WM i l'OWA
    - When $\mathbf{p} = (1/N \ \dots \ 1/N)$, OWA

$$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(a_1, ..., a_N) = OWA_{\mathbf{w}}(a_1, ..., a_N) \text{ for all } \mathbf{w} \text{ and } a_i.$$

    - When $\mathbf{w} = (1/N \ ... \ 1/N)$, WM

$$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(a_1, ..., a_N) = WM_{\mathbf{p}}(a_1, ..., a_N) \text{ for all } \mathbf{p} \text{ and } a_i.$$

    - When $\mathbf{w} = \mathbf{p} = (1/N \ ... \ 1/N)$, AM

$$WOWA_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(a_1, ..., a_N) = AM(a_1, ..., a_N)$$

Choquet integrals

- In WM, we combine a_i w.r.t. weights p_i.
  $\longrightarrow$ a_i is the value supplied by information source x_i.
  Formally

Choquet integrals

- In WM, we combine a_i w.r.t. weights p_i.
  $\rightarrow$ a_i is the value supplied by information source x_i.
  Formally
  - $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ is the set of information sources
  - $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ the values supplied by the sources
    $\rightarrow$ then $a_i = f(x_i)$

  Thus,

$$WM_{\mathbf{p}}(a_1, ..., a_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i a_i = \sum_{i=1}^{N} p_i f(x_i) = WM_{\mathbf{p}}(f(x_1), ..., f(x_N))$$

Choquet integrals

- A la WM, un únic pes per a cada element
  Això és, $p_i = p(x_i)$ (on, x_i és la font d'informació que subministra a_i)
  $\rightarrow$ quan considerem un conjunt $A \subset X$, *pes* de A???

Choquet integrals

- A la WM, un únic pes per a cada element
  Això és, $p_i = p(x_i)$ (on, x_i és la font d'informació que subministra a_i)
  $\rightarrow$ quan considerem un conjunt $A \subset X$, *pes* de A???

  … mesures difuses (fuzzy measures) $\mu(A)$

  Formalment,

  – Fuzzy measure ($\mu : \wp(X) \rightarrow [0,1]$), a set function satisfying
  (i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$ (boundary conditions)
  (ii) $A \subseteq B$ implies $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonicity)

Choquet integrals

- Ara tenim una mesura difusa $\mu(A)$
  i, aleshores, com agreguem?
  $\Rightarrow$ integrals difuses com ara la integral de Choquet

Choquet integrals

- Choquet integral of f w.r.t. μ (alternative notation, $CI_\mu(a_1, \ldots, a_N)/CI_\mu(f)$)

$$(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N} [f(x_{s(i)}) - f(x_{s(i-1)})]\mu(A_{s(i)}),$$

where s in $f(x_{s(i)})$ is a permutation so that $f(x_{s(i-1)}) \leq f(x_{s(i)})$ for $i \geq 1$, $f(x_{s(0)}) = 0$, and $A_{s(k)} = \{x_{s(j)} | j \geq k\}$ and $A_{s(N+1)} = \emptyset$.

- Alternative expressions (Proposition 6.18):

$$(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N} f(x_{\sigma(i)})[\mu(A_{\sigma(i)}) - \mu(A_{\sigma(i-1)})],$$

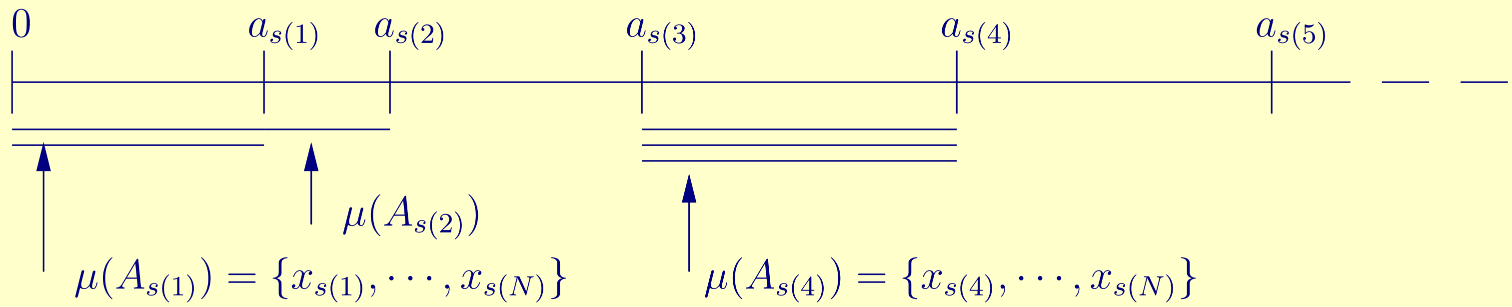
$$(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N} f(x_{s(i)})[\mu(A_{s(i)}) - \mu(A_{s(i+1)})],$$

where σ is a permutation of $\{1, \ldots, N\}$ s.t. $f(x_{\sigma(i-1)}) \geq f(x_{\sigma(i)})$, where $A_{\sigma(k)} = \{x_{\sigma(j)} | j \leq k\}$ for $k \geq 1$ and $A_{\sigma(0)} = \emptyset$

Choquet integrals

- Different equations point out different aspects of the CI

(6.1) $(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N}[f(x_{s(i)}) - f(x_{s(i-1)})]\mu(A_{s(i)})$,

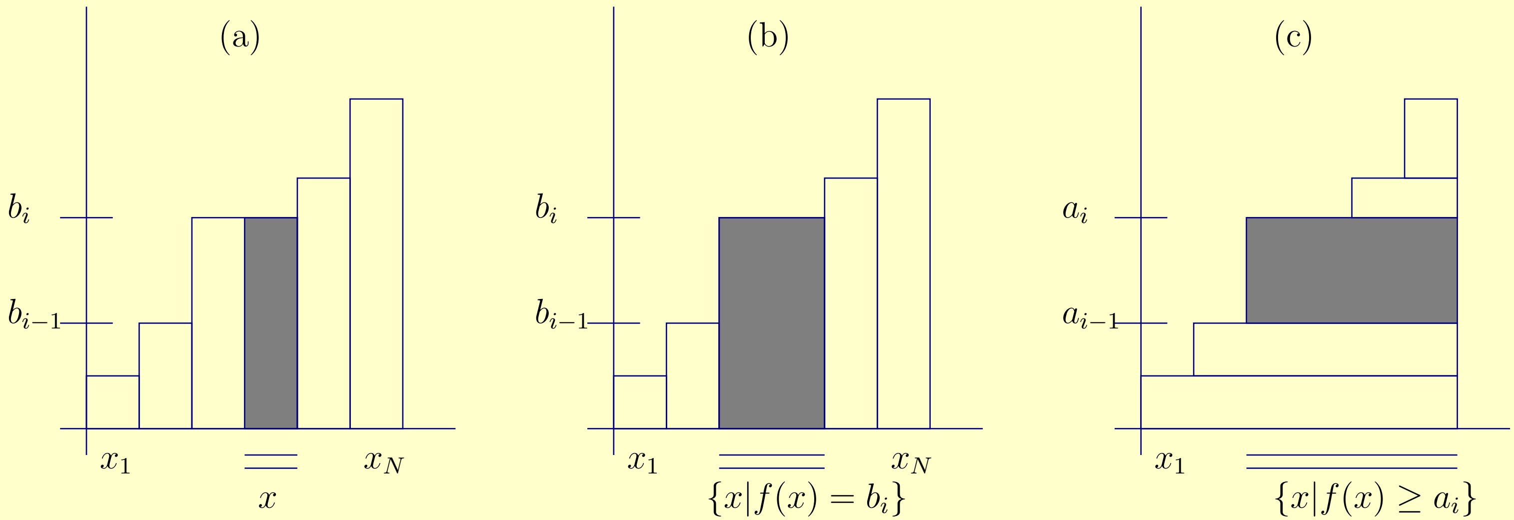


(6.2) $(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N} f(x_{\sigma(i)})[\mu(A_{\sigma(i)}) - \mu(A_{\sigma(i-1)})]$,

Choquet integrals

- $\int f d\mu =$ (for additive measures)

  (6.5) $\sum_{x \in X} f(x)\mu(\{x\})$
  (6.6) $\sum_{i=1}^{R} b_i \mu(\{x|f(x) = b_i\})$
  (6.7) $\sum_{i=1}^{N} (a_i - a_{i-1})\mu(\{x|f(x) \geq a_i\})$
  (6.8) $\sum_{i=1}^{N} (a_i - a_{i-1})\big(1 - \mu(\{x|f(x) \leq a_{i-1}\})\big)$

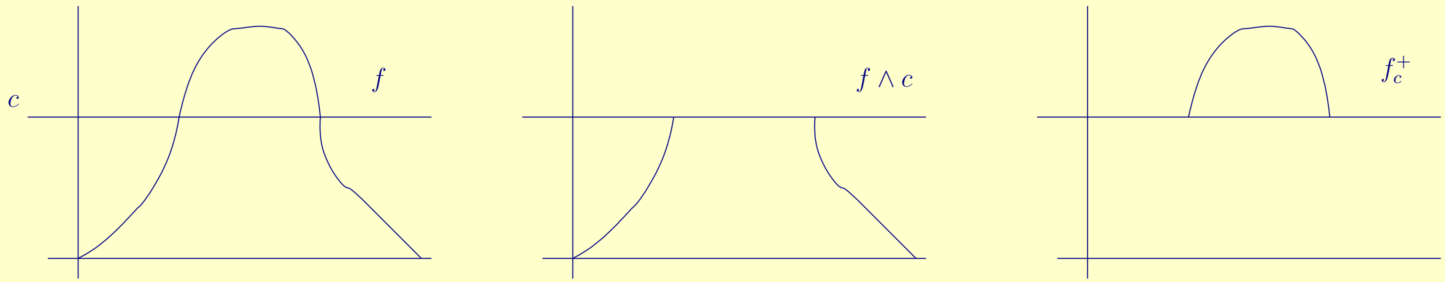


- Among (6.5), (6.6) and (6.7), only (6.7) satisfies internality.

Choquet integrals

- Properties of CI
  - Horizontal additive because $CI_\mu(f) = CI_\mu(f \wedge c) + CI_\mu(f_c^+)$
    ($f = (f \wedge c) + f_c^+$ is a horizontal additive decomposition of f)
    where, f_c^+ is defined by (for $c \in [0,1]$)

$$f_c^+ = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \leq c \\ f(x) - c & \text{if } f(x) > c. \end{cases}$$



Choquet integrals

- Definitions (X a reference set, f, g functions $f, g : X \to [0, 1]$)
  - $f < g$ when, for all x_i,
    $$f(x_i) < g(x_i)$$
  - f and g are comonotonic if, for all $x_i, x_j \in X$,
    $$f(x_i) < f(x_j) \text{ imply that } g(x_i) \leq g(x_j)$$
  - $\mathbb{C}$ is comonotonic monotone if and only if, for comonotonic f and g,
    $$f \leq g \text{ imply that } \mathbb{C}(f) \leq \mathbb{C}(g)$$
  - $\mathbb{C}$ is comonotonic additive if and only if, for comonotonic f and g,
    $$\mathbb{C}(f + g) = \mathbb{C}(f) + \mathbb{C}(g)$$

- Characterization. Let $\mathbb{C}$ satisfy the following properties
  - $\mathbb{C}$ is comonotonic monotone
  - $\mathbb{C}$ is comonotonic additive
  - $\mathbb{C}(1, \ldots, 1) = 1$

  Then, there exists μ s.t. $\mathbb{C}(f)$ is the CI of f w.r.t. μ.

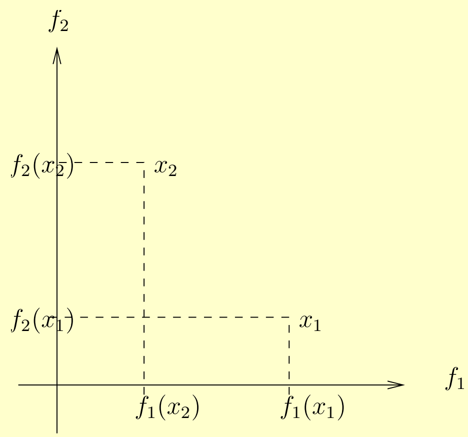
Choquet integrals

- Properties
  - WM, OWA and WOWA are particular cases of CI.
    * WM with weighting vector $\mathbf{p}$ is a CI w.r.t. $\mu_{\mathbf{p}}(B) = \sum_{x_i \in B} p_i$
    * OWA with weighting vector $\mathbf{w}$ is a CI w.r.t. $\mu_{\mathbf{w}}(B) = \sum_{i=1}^{|B|} w_i$
    * WOWA with w.v. $\mathbf{p}$ and $\mathbf{w}$ is a CI w.r.t. $\mu_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(B) = w^*(\sum_{x_i \in B} p_i)$
  - Any symmetric CI is an OWA operator.
  - Any CI with a distorted probability is a WOWA operator.
  - Let A be a crisp subset of X; then, the Choquet integral of A with respect to μ is $\mu(A)$.

    Here, the integral of A corresponds to the integral of its characteristic function, or, in other words, to the integral of the function f_A defined as $f_A(x) = 1$ if and only if $x \in A$.

Choquet integrals

- Properties: punts *iguals*



Weighted Minimum and Weighted Maximum

- Possibilistic weighting vector (dimension N): $\mathbf{v} = (v_1 ... v_N)$ iff $v_i \in [0, 1]$ and $\max_i v_i = 1$.

- Weighted minimum (WMin: $[0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$):
  $WMin_{\mathbf{u}}(a_1, ..., a_N) = \min_i \max(neg(u_i), a_i)$
  (alternative definition can be given with $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N)$ where $v_i = neg(u_i)$)

- Weighted maximum (WMax: $[0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$):
  $WMax_{\mathbf{u}}(a_1, ..., a_N) = \max_i \min(u_i, a_i)$

Weighted Minimum and Weighted Maximum

- **Exemple 6.34.** Avaluació de les alternatives del curs.
  - Vector de pesos (vector possibilístic): $\mathbf{u} = (1,\ 0,5,\ 0,3,\ 0,1)$.
  - WMin:
    - $sat(2,2) = WMin_{\mathbf{u}}(0,\ 0,5,\ 1,\ 1) = 0$
    - $sat(2,3) = WMin_{\mathbf{u}}(0,5,\ 0,5,\ 0,5,\ 0,5) = 0,5$
    - $sat(2,4) = WMin_{\mathbf{u}}(1,\ 0,5,\ 0,\ 0,5) = 0,5$
    - $sat(3,5,\ 2,5) = WMin_{\mathbf{u}}(1,\ 0,5,\ 0,5,\ 0,5) = 0,5$
    - $sat(3,2) = WMin_{\mathbf{u}}(0,5,\ 1,\ 1,\ 0,5) = 0,5$
    - $sat(3,3) = WMin_{\mathbf{u}}(1,\ 1,\ 0,5,\ 1) = 0,7$.
  - WMax: (amb $neg(\mathbf{u}) = (0,\ 0,5,\ 0,7,\ 0,9)$, segons $neg(x) = 1 - x$)
    - $sat(2,2) = WMax_{\mathbf{u}}(0,\ 0,5,\ 1,\ 1) = 0,5$
    - $sat(2,3) = WMax_{\mathbf{u}}(0,5,\ 0,5,\ 0,5,\ 0,5) = 0,5$
    - $sat(2,4) = WMax_{\mathbf{u}}(1,\ 0,5,\ 0,\ 0,5) = 1$
    - $sat(3,5,\ 2,5) = WMax_{\mathbf{u}}(1,\ 0,5,\ 0,5,\ 0,5) = 1$
    - $sat(3,2) = WMax_{\mathbf{u}}(0,5,\ 1,\ 1,\ 0,5) = 0,5$
    - $sat(3,3) = WMax_{\mathbf{u}}(1,\ 1,\ 0,5,\ 1) = 1$.
  - mínim ponderat, el millor parell és el $(3,3)$, però que, quan utilitzem el màxim ponderat, són indistingibles els parells $(2,4)$ i $(3,5,\ 2,5)$

Weighted Minimum and Weighted Maximum

- **Exemple 6.35.** Sistema d'inferència difús

  R_i: **IF** x is A_i **THEN** y is B_i.

  – with disjunctive rules, the (fuzzy) output for a particular y_0 is a WMax

  $$\tilde{B}(y_0) = \vee_{i=1}^{N}\big(B_i(y_0) \wedge A_i(x_0)\big).$$

  – with conjunctive rules, and Kleene-Dienes implication ($\mathcal{I}(x, y) = \max(1 - x, y)$) the (fuzzy) output of the system for a particular y_0 is a WMin

  $$\tilde{B}(y_0) = \wedge_{i=1}^{N}\big(\mathcal{I}(A_i(x_0), B_i(y_0))\big) = \wedge_{i=1}^{N} \max(1 - A_i(x_0), B_i(y_0)).$$

  that with $\mathbf{u} = (A_1(x_0), \ldots, A_N(x_0))$

  $$\tilde{B}(y_0) = WMin_{\mathbf{u}}(B_1(y_0), \ldots, B_N(y_0)).$$

Weighted Minimum and Weighted Maximum

- Only operators in ordinal scales (max, min, neg) are used in $WMax$ and $WMin$.
- neg is completely determined in an ordinal scale

Proposition 6.36. Let $L = \{l_0, \ldots, l_r\}$ with $l_0 <_L l_1 <_L \cdots <_L l_r$; then, there exists only one function, $neg : L \rightarrow L$, satisfying

(N1) if $x <_L x'$ then $neg(x) >_L neg(x')$ for all x, x' in L.
(N2) $neg(neg(x)) = x$ for all x in L.

This function is defined by $neg(x_i) = x_{r-i}$ for all x_i in L

- Properties. For $\mathbf{u} = (1, \ldots, 1)$
  - $WMIN_{\mathbf{u}} = \min$
  - $WMAX_{\mathbf{u}} = \max$

Sugeno integral

- Sugeno integral of f w.r.t. μ (alternative notation, $SI_\mu(a_1, \ldots, a_N)/SI_\mu(f)$)

$$(S) \int f d\mu = \max_{i=1,N} \min(f(x_{s(i)}), \mu(A_{s(i)})),$$

  where s in $f(x_{s(i)})$ is a permutation so that $f(x_{s(i-1)}) \leq f(x_{s(i)})$ for $i \geq 2$, and $A_{s(k)} = \{x_{s(j)} | j \geq k\}$.

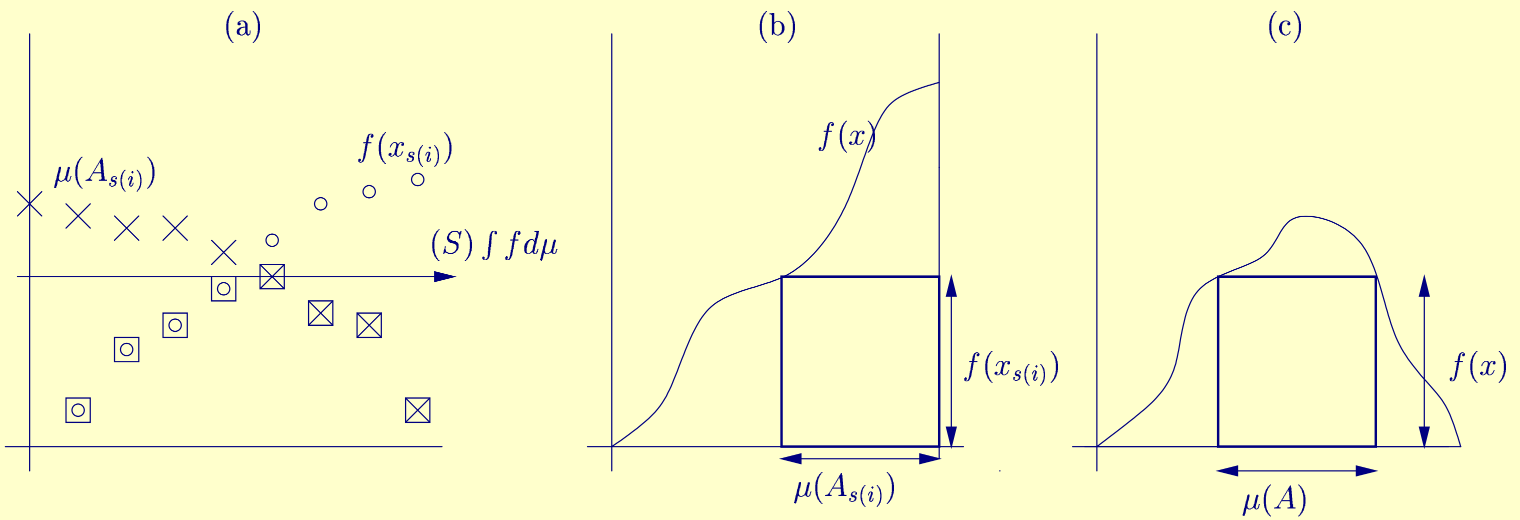
- Alternative expression (Proposition 6.38):

$$\max_i \min(f(x_{\sigma(i)}), \mu(A_{\sigma(i)})),$$

  where σ is a permutation of $\{1, \ldots, N\}$ s.t. $f(x_{\sigma(i-1)}) \geq f(x_{\sigma(i)})$, where $A_{\sigma(k)} = \{x_{\sigma(j)} | j \leq k\}$ for $k \geq 1$

Sugeno integral

- Graphical interpretation of Sugeno integrals



Sugeno integral

- Properties
  - WMin and WMax are particular cases of SI
    * WMax with weighting vector $\mathbf{u}$ is a SI w.r.t. $\mu_{\mathbf{u}}^{wmax}(A) = \max_{a_i \in A} u_i$.
    * WMin with weighting vector $\mathbf{u}$ is a SI w.r.t. $\mu_{\mathbf{u}}^{wmin}(A) = 1 - \max_{a_i \notin A} u_i$.

Sugeno integral

Example. Citation indices

- Number of citations: CI
- h-index: SI

In both cases,

- X the set of papers
- $f(x)$ the number of citations of paper x
- $\mu(A) \subseteq X$ the cardinality of the set

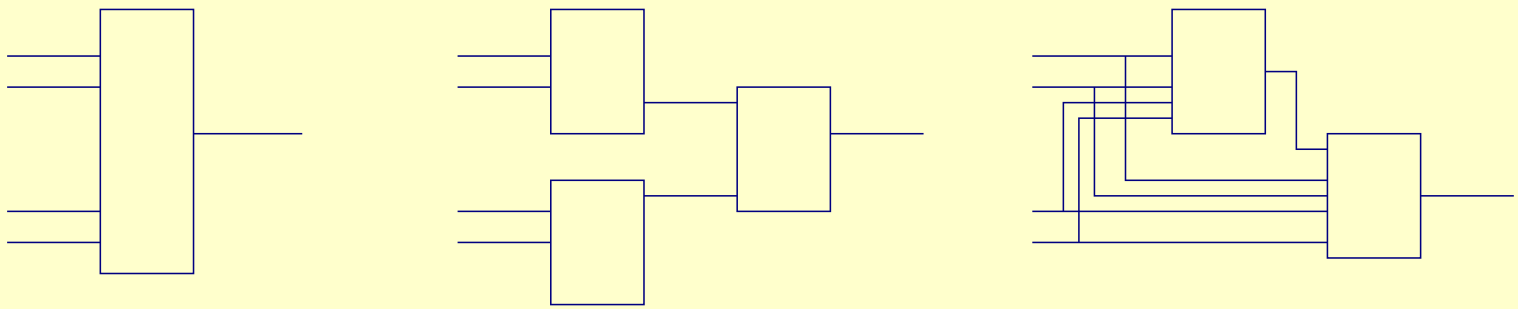
Fuzzy integrals

- Fuzzy integrals that generalize Choquet and Sugeno integrals
  - The fuzzy t-conorm integral
  - The twofold integral

Models jeràrquics

Hierarchical Models for Aggregation

- Hierarchical model



- Properties. The following conditions hold

  (i) Every multistep Choquet integral is a monotone increasing, positively homogeneous, piecewise linear function.

  (ii) Every monotone increasing, positively homogeneous, piecewise linear function on a full-dimensional convex set in $\mathbb{R}^N$ is representable as a two-step Choquet integral such that the fuzzy measures of the first step are additive and the fuzzy measure of the second step is a 0-1 fuzzy measure.

Índex

Índex

- Equacions funcions i síntesis de judicis
- De la mitjana ponderada a les integrals difuses
- Mesures difuses
- Índexs i mètodes d'avaluació
- Selecció del model