

**Girona**

# **Presa de decisions**

Vicenç Torra<sup>1</sup>

Gener, 2007

<sup>1</sup> Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial (IIIA-CSIC)

# Índex

---

- Presa de decisions
  - Introducció
  - MCDM i elecció social
  - Preferències
  - Utilitats
  - Agregació: introducció

# Introducció

---

- Presa de decisions:
  - Triar entre diverses alternatives.
- Exemple:
  - Volem comprar un cotxe, i hi ha diversos models.
  - Alternatives:  $\{Peugeot206, FordT., \dots\}$

# Introducció

---

- Multicriteria Decision Aid (MCDA) i Multicriteria Decision Making (MCDM)
  - Eines per ajudar en la presa de decisions.
  - Dificultat del problema:
    - \* Hi ha diverses alternatives
    - \* Cal tenir en compte diversos punts de vista (sovint contradictoris)
  - MCDA: Es donen eines per capturar, entendre i analitzar les diferències (punt de vista constructivista)
  - MCDM: Es donen eines per descriure el procés de decisió. Es suposa que es pot formalitzar el procés de decisió (punt de vista descriptiu)

# Introducció

---

- L'exemple de la compra del cotxe:
  - Alternatives:  $\{Peugeot206, FordT., \dots\}$
  - Punts de vista/criteris: Preu, Qualitat, Confort
- MCDA: Es donen eines per capturar, entendre i analitzar les diferències
- MCDM: Es donen eines per descriure el procés de decisió.

# Introducció: MCDM

---

- El procés descriptiu es formula en termes matemàtics.
  - **Funcions d'utilitat.**
    - \* Cal disposar d'una funció per a cada criteri.
    - \* La funció s'aplica a cada alternativa.
    - \* La funció retorna un valor més gran per a les alternatives que satisfan millor el criteri.
  - **Relacions de preferències (comparació entre les diverses alternatives)**
    - \* Cal disposar d'una relació binària per a cada criteri.
    - \* Cada relació ens ordena les alternatives segons el criteri considerat.

# Introducció

---

- L'exemple de la compra del cotxe:
  - Alternatives:  $\{Peugeot206, FordT., \dots\}$
  - Punts de vista/criteris: Preu, Qualitat, Confort
- Formalització:
  - **Funció d'utilitat ( $U$ ):**
    - Ford T:**  $U_{preu} = 0.2, U_{qualitat} = 0.8, U_{confort} = 0.3$
    - Peugeot206:**  $U_{preu} = 0.7, U_{qualitat} = 0.7, U_{confort} = 0.8$
  - **Relacions de preferència ( $R$ )**
    - $R_{preu}$ :**  $R_{preu}(P206, FordT), \neg R_{preu}(FordT, P206)$
    - $R_{qualitat}$ :**  $\neg R_{qualitat}(P206, FordT), R_{qualitat}(FordT, P206)$
    - $R_{confort}$ :**  $R_{confort}(P206, FordT), \neg R_{confort}(FordT, P206)$

# Introducció

---

- En el marc de MCDA o MCDM es distingeixen dues àrees:
  - MODM (Multi-Objective Decision Making): correspon a la situació amb un nombre infinit d'alternatives (espais d'alternatives continu).
  - MADM (Multi-Attribute Decision Making): correspon a la situació en que el nombre d'alternatives és petit
    - Sovint s'entén MCDM com a sinònim de MADM.
    - \* L'exemple de la tria de cotxes correspon a un problema MADM/MCDM

MODM (multi-objective decision making): aquests problemes es formulen normalment mitjançant problemes d'optimització, i es resolen amb mètodes de programació matemàtica (tipus SIMPLEX). S'han aplicat també altres tècniques com ara els algorismes genètics.



---

# MCDM i elecció social

# MCDM i elecció social

---

- MCDM (decisió) i l'elecció social.  
→ dues àrees relacionades.

# MCDM i elecció social

---

- L'elecció social (social choice)
  - estudia regles de votació, i com les preferències d'un conjunt de gent es poden agregar (combinar) per obtenir la preferència del conjunt.
- Tot i que en l'elecció social estem construint una preferència global a partir d'opinions de persones en lloc de criteris, des d'un punt de vista formal no hi ha gaire diferència entre els dos casos<sup>1</sup>.
  - Les persones no *decideixen*, només expressen les seves **preferències**
- Així, (*informalment*)
  - l'elecció social *ignora* les persones
  - l'elecció social *només* estudia com *agregar* les preferències i construir la preferència composta

---

<sup>1</sup>A. Rapoport, Decision Theory and Decision Behaviour, Kluwer Academic Publishers, 1989. p. 5

# MCDM i elecció social

---

- Regla de la majoria (elecció social vs. MCDM):
  - L'alternativa seleccionada és la preferida per la majoria de gent.
  - L'alternativa seleccionada és la que guanya en tots els criteris.

# MCDM i elecció social

---

- Exemple (de MCDM/presa de decisions):
  - El Peugeot 206 és millor en quant a preu i a confort (guanya 2 vegades)
  - El Ford T només és millor en qualitat (guanya 1 vegada)
  - Guanya el Peugeot 206
- Exemple (d'elecció social)
  - Una família de 3 membres  $\{p, q, c\}$  volen comprar un cotxe
    - \*  $p$  prefereix el Peugeot 206
    - \*  $q$  prefereix el Ford T
    - \*  $c$  prefereix el Peugeot 206
  - Fan una votació (cadascú vota el que prefereix):
    - \* guanya l'opció Peugeot 206.

# MCDM i elecció social

---

- Regla de la majoria (elecció social vs. MCDM):
  - L'alternativa seleccionada és la preferida per la majoria de gent.
  - L'alternativa seleccionada és la que guanya en tots els criteris.
- En aquesta regla només considerem **l'alternativa més preferida** (per a cada criteri), però no com estan ***ordenades* les altres opcions**.

---

# Preferències

# Preferències

---

- Donades les preferències, com construir l'agregació?



# Preferències

---

- Expressem (formalitzem) les opinions (els criteris)
  - Formalitzem les preferències amb  $> i =$  (per simplificar)  
(alternativament,  $P(x, y)$  i  $I(x, y)$ )  
(o,  $\leq i$  definim  $x = y$  com  $x \leq y$  i  $y \leq x$ )
    - \*  $x > y$ , si preferim  $x$  a  $y$ .
    - \*  $x = y$ , si ens és indiferent  $x$  o  $y$ .
  - Utilitzem  $R_i$ , per denotar l'ordre de la persona (o criteri)  $i$ -èssima.
  - Utilitzem  $F(R_1, R_2, \dots, R_N)$ , per denotar l'agregació

# Preferències

---

- Com construïm l'agregació:
  - ... primeres dificultats
    - \*  $R^1: x > y > z$
    - \*  $R^4: y > z > x$
    - \*  $R^5: z > x > y$
  - Agregació segons la regla de la majoria simple:
    - $u > v$  si la majoria prefereixen  $u$  a  $v$
  - Aplicació:
    - \*  $x > y, y > z, z > x$
  - **Relació intransitiva!!!** ( $x > y, y > z$  però no  $x > z$ )

# Preferències

---

- Com construïm l'agregació:
  - ... més dificultats → **Teorema d'impossibilitat d'Arrow**

# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: condicions
  - Suposa que tenim,
    - \* Com a mínim tres alternatives
    - \* Com a mínim dues preferències (dos criteris o dues persones)
    - \* Cerquem una funció que es pugui aplicar a tot conjunt de preferències.

# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: condicions
  - La funció és monòtona. Això és, si modifiquem una preferència de manera que una alternativa és *promocionada*, la funció ha d'evitar, com a mínim, la *degradació* d'aquesta alternativa.
  - Raonament:
    - \* Alternatives  $x, y, z$ , i preferències  $R^1, R^{11}, R^{13}$   
→  $F_0(R^1, R^{11}, R^{13})$  prefereix  $y$  a  $z$
    - \* Si passem a preferències  $R^{10}, R^{11}, R^8$  on es *millora*  $y$   
→  $F_0(R^{10}, R^{11}, R^8)$  també prefereix  $y$  a  $z$

# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: condicions
  - La funció satisfà la condició d'*independència de les alternatives irrelevantes*. Això és, que la preferència final sobre  $x$  i  $y$  ha de ser independent de les preferències per a les altres alternatives.
  - Raonament:
    - \* Si  $x$  és la millor alternativa d'un conjunt  $A$ , si treiem del conjunt un element  $y \neq x$ ,  $x$  ha de seguir sent la millor alternativa de  $A$ .

# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: condicions
  - Qualsevol preferència s'ha de poder obtenir com a resultat de la funció.
  - Raonament:
    - \* Aquesta condició permet que, per a qualsevol parell  $x, y$ , sigui possible que la *societat* preferixi  $x$  a  $y$ .
    - \* Si la condició no passés, voldria dir que és impossible preferir  $x$  a  $y$ .
    - \* O sigui, seria **imposat**  $x$  no és preferit a  $y$  (ço és,  $y \geq x$ ).

# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: condicions
  - La funció no ha d'implicar dictadura:
  - sempre que un individu prefereixi  $x$  a  $y$ , la societat també (amb independència de l'opinió dels altres)
  - Raonament:
    - \* El resultat seria igual a una de les opinions (excepte en el cas d'indiferència).



# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: formalització
  - quan hi ha com a mínim tres alternatives i com a mínim dues preferències, no existeix cap funció d'agregació que satisfaci les propietats següents per a tots els conjunts de preferències:
    1. Qualsevol preferència s'ha de poder obtenir com a resultat de la funció.
    2. La funció no ha d'implicar dictadura (això és, que la funció no pot correspondre a una de les preferències que agreguem).
    3. La funció és monòtona. Això és, si modifiquem una preferència de manera que una alternativa és *promocionada*, la funció ha d'evitar, com a mínim, la *degradació* d'aquesta alternativa.
    4. La funció satisfà la condició d'*independència de les alternatives irrelevantes*. Això és, que la preferència final sobre  $x$  i  $y$  ha de ser independent de les preferències per a les altres alternatives.

# Preferències: Teorema d'Arrow

---

- Teorema d'impossibilitat d'Arrow: com *solucionar-lo*?

# Preferències: Alternatives a Arrow

---

- Alternatives a les condicions d'Arrow
  - Modificar la formulació del problema (I)
    - \*
  - Mantenir la formulació del problema i eliminar alguna condició (II)
    - \*

# Preferències: Alternatives a Arrow

---

- Alternatives a les condicions d'Arrow
  - Modificar la formulació del problema (I)
    - \* Restriccions en les entrades (p.ex., prohibir grans divergències)
  - Mantenir la formulació del problema i eliminar alguna condició (II)
    - \* P. ex., eliminar la independència de les alternatives irrelevantes

# Preferències: Alternatives a Arrow (I)

---

- Modifiquem la formulació del problema:
    - No permetem divergències massa grans en les entrades.
  - Condicions:
    - Suposem que hi ha un continu unidimensional subjacent
    - Cada individu té un ideal en el continu
    - Ordena les preferències segons l'ideal
- cas més general: single peaked (Black)
- single peaked:** *there is some basic ordering of the alternatives such that, in passing from one alternative to the next in this basic ordering each individual monotonically rises to the peak of his preferences and then monotonically drops off in the direction of dispreference*

# Preferències: Alternatives a Arrow (I)

---

- Modifiquem la formulació del problema: **condició d'un únic pic**
  - si el nombre d'individus és senar, i restringim les preferències a aquelles que satisfan la condició d'un únic pic, aleshores és possible definir una funció d'agregació que satisfaci les condicions d'Arrow.
- Exemple:
  - La majoria simple satisfà les condicions

# Preferències: Alternatives a Arrow (II)

---

- Mantenim la formulació del problema i eliminem alguna condició
  - Eliminar la independència de les alternatives irrelevantes
- Regla de Copeland (variació de Condorcet)<sup>2</sup>:
  - $u(x)$  :  
nombre de vegades en què  $x$  guanya - nombre de vegades en què  $x$  perd
  - No satisfà la condició d'independència de les alternatives irrelevantes

---

<sup>2</sup>La regla de Condorcet amb el desempat de Copeland va ser definit per Ramon Llull (s. XIII) en diversos treballs. Per exemple, a la novel·la Blanquerna.

# Preferències: Alternatives a Arrow (II)

---

- Mantenim la formulació del problema i eliminem alguna condició
  - Eliminar la independència de les alternatives irrelevantes
- Regla de Borda<sup>3</sup>
  - Assignem un pes a cada alternativa segons l'ordre  $(n, n - 1, \dots, 1)$
  - Sumem els pesos
  - No satisfà la condició d'independència de les alternatives irrelevantes

---

<sup>3</sup>Nicolau de Cusa va introduir la regla de Borda el s. XV.

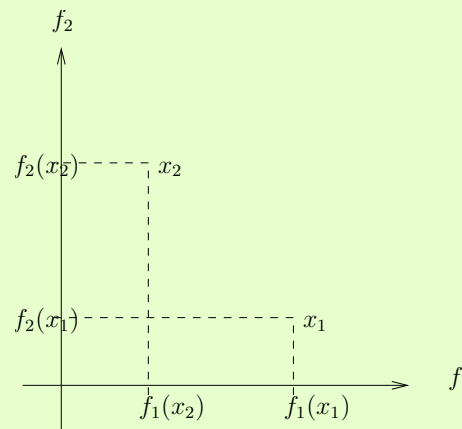


---

# Utilitats

# Utilitats

- Problema MADM/MCDM amb utilitats
  - Dificultat de tenir en compte els punts de vista contradictoris
  - Les utilitats ens permeten expressar aquests punts de vista contradictoris
- Es diu que una situació és **òptim de Pareto** (o Pareto-eficient) quan no és possible que ningú hi obtingui un guany superior sense que hi perdi algú altre.



# Utilitats

- Solució d'un problema MADM/MCDM amb utilitats

**Opció 1:** Construïm relacions, i treballem amb preferències

**Opció 2:**

- **Agreguem** els graus de satisfacció/utilitat
- Ordenem les alternatives segons els graus de satisfacció  
→ seleccionem l'alternativa (o el conjunt d'alternatives) millor

Criteria  
Satisfaction on:

alt	Price	Quality	Comfort	alt	Consensus	alt	Ranking
FordT	0.2	0.8	0.3	FordT	0.35	206	0.72
206	0.7	0.7	0.8	206	0.72	FordT	0.35
...	...		→	...	...	→	...

---

# Agregació: introducció

# Agregació: Introducció

---

- L'agregació o fusió d'informació:
  - En el nostre cas, com combinar els valors associats als criteris
- En general,
  - tota una àrea de recerca, amb aplicacions molt diverses
- Exemples de funcions d'agregació:
  - $\sum_{i=1}^N a_i / N$  (mitjana aritmètica, AM arithmetic mean)
  - $\sum_{i=1}^N p_i \cdot a_i$  (mitjana ponderada, WM weighted mean)
- Naturalment, funcions diferents donen resultats diferents
  - En el nostre cas, funcions diferents donen ordenacions diferents!

# Agregació: Introducció

---

- Objectiu de l'agregació:
  - Produir una dada específica, i a la vegada exhaustiva, sobre una entitat.
  - Aquesta dada es construeix a partir de les informacions subministrades per diverses fonts d'informació (o per la mateixa font a partir d'informació recollida en diversos instants de temps).
  - Aquestes tècniques s'empren per reduir algun tipus de soroll, incrementar la precisió, resumir la informació, extreure informació, prendre decisions, etc.

# Agregació: Introducció

---

- La fusió d'informació estudia ...
  - ... tots els aspectes relacionats amb la combinació d'informació:
- Objectius de l'agregació (*objectius de l'àrea*):
  - Formalització del procés d'agregació
    - \* Definició de noves funcions
    - \* Selecció de funcions
      - (mètodes per decidir quina és la funció més apropiada en una situació donada)
    - \* Determinació dels paràmetres
  - Estudi dels mètodes existents:
    - \* Caracterització de funcions
    - \* Determinació de les capacitats de modelització de les funcions
    - \* Relació entre operadors i paràmetres
      - (per saber com els paràmetres afecten el resultat: es pot aconseguir la propietat de dictador?, sensibilitat a les dades → índex).

# Agregació: Introducció

---

- Termes:

- Integració d'informació
- Fusió d'informació: funcions/tècniques concretes:  
el procés concret de combinar diverses dades per obtenir-ne una de sola.
- Operadors d'agregació:  $\mathbb{C} : D^N \rightarrow D$  ( $\mathbb{C}$  de Consens)  
→ i  $\mathbb{C}$  amb paràmetres (coneixement de base):  $\mathbb{C}_P$

- Agregació:

- Unanimitat o idempotència:  $\mathbb{C}(a, \dots, a) = a$  per a tot  $a$
- Monotonia:  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_N) \geq \mathbb{C}(a'_1, \dots, a'_N)$  quan  $a_i \geq a'_i$
- Simetria: Per a qualsevol permutació  $\pi$  sobre  $\{1, \dots, N\}$   
 $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_N) = \mathbb{C}(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(N)})$
- Unanimitat + monotonia → internalitat:  
 $\min_i a_i \leq \mathbb{C}(a_1, \dots, a_N) \leq \max_i a_i$



# Agregació: Introducció

---

- Dimensions:
  - Tipus d'informació
    - \* redundant vs. complementària
  - Tipus de representació de dades:
    - \* numèrica, ordinal, conjunts difusos, relacions de preferència, dendrogrames, particions, ...
  - Nivell d'abstracció:
    - \* baix nivell vs. alt nivell

# Agregació: Introducció

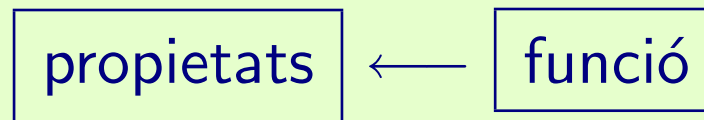
---

## Definició:

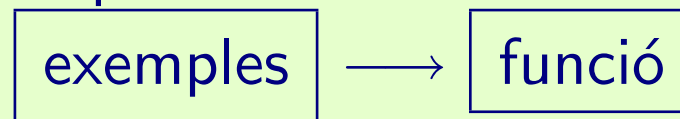
- Definició a partir de propietats



- Definició heurística



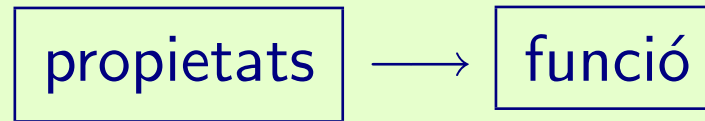
- Definició a partir d'exemples



# Agregació: Introducció

---

- Definició a partir de propietats



- Exemple

a) Emprant equacions funcionals

b) Agregació de  $a_1, a_2, \dots, a_N \in D$ , com el  $c$  situat a la mínima distància dels  $a_i$ :

$$\mathbb{C}(a_1, a_2, \dots, a_N) = \operatorname{argmin}_c \left\{ \sum_{a_i} d(c, a_i) \right\},$$

$d$  és una distància sobre  $D$ .

# Agregació: Introducció

- Exemple (continuació, cas (b)): Considerem l'expressió següent:

$$\mathbb{C}(a_1, a_2, \dots, a_N) = \operatorname{argmin}_c \left\{ \sum_{a_i} d(c, a_i) \right\},$$

on els  $a_i$  són nombre de  $\mathbb{R}$  i  $d$  és una distància sobre  $D$ . Aleshores,

1. Quan  $d(a, b) = (a - b)^2$ ,  $\mathbb{C}$  és la mitjana aritmètica.

Això és,  $\mathbb{C}(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{i=1}^N a_i / N$ .

2. Quan  $d(a, b) = |a - b|$ ,  $\mathbb{C}$  és la mediana.

Això és, la mediana de  $a_1, a_2, \dots, a_N$  és l'element que ocupa la posició central quan ordenem els elements  $a_i$ .

3. Quan  $d(a, b) = 1$  sii  $a = b$ ,  $\mathbb{C}$  és la regla de pluralitat (moda o votació).

Això és,  $\mathbb{C}(a_1, a_2, \dots, a_N)$  selecciona l'element de  $\mathbb{R}$  que trobem més sovint entre els elements de  $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ .

# Agregació: Introducció

---

- **Exemple.**  $A$  i  $B$  imparteixen un curs (teoria+pràctica). Restriccions:
  - El nombre total de sessions és sis.
  - El professor  $A$  donarà la part de teoria, que hauria de consistir en unes tres sessions. Tres és el valor òptim, i una diferència entre el nombre de sessions més gran que dues és inacceptable.
  - El professor  $B$  donarà la part de problemes, que consisteix en dues sessions.
  - Els dos professors han de donar, més o menys, el mateix nombre de sessions. Una diferència d'una o dues és mitjanament acceptable, però una diferència de tres és inacceptable.

# Agregació: Introducció

---

- **Exemple.** Formalització

- Variables

- \*  $x_A$ : nombre de sessions impartides pel professor  $A$
- \*  $x_B$ : nombre de sessions impartides pel professor  $B$ .

- Restriccions

- \*  $C_1$ :  $x_A + x_B$  ha de ser al voltant de 6
- \*  $C_2$ :  $x_A$  ha de ser al voltant de 3
- \*  $C_3$ :  $x_B$  ha de ser al voltant de 2
- \*  $C_4$ :  $|x_A - x_B|$  ha de ser al voltant de zero.

- Les restriccions es descriuen mitjançant conjunts difusos ...

# Agregació: Introducció

---

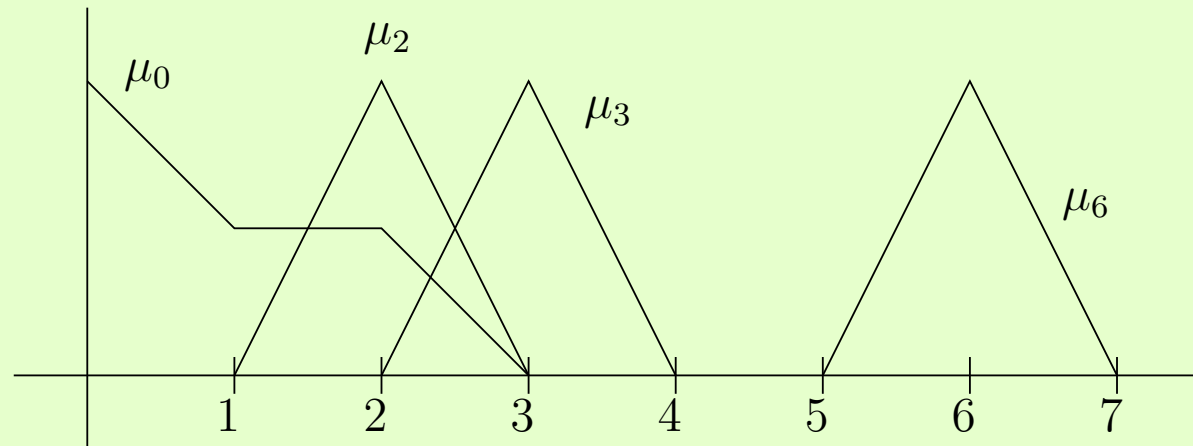
- **Exemple.** Formalització

- si  $\mu_6$  expressa “al voltant de 6”, aleshores avaluem “ $x_A + x_B$  ha de ser al voltant de 6” per  $\mu_6(x_A + x_B)$ .  
→ donats  $\mu_6, \mu_3, \mu_2, \mu_0$ .
- Aleshores, donat un parell  $(x_A, x_B)$  (una solució possible), obtenim els graus de satisfacció següents:
  - \*  $\mu_6(x_A + x_B)$
  - \*  $\mu_3(x_A)$
  - \*  $\mu_2(x_B)$
  - \*  $\mu_0(|x_A - x_B|)$ .

# Agregació: Introducció

- **Exemple.** Formalització

- Funcions de pertinença per a les restriccions.





# Agregació: Introducció

- **Exemple.** Formalització

alternativa	Graus de satisfacció	graus de satisfacció			
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$(x_A, x_B)$	$(\mu_6(x_A + x_B), \mu_3(x_A), \mu_2(x_B), \mu_0( x_A - x_B ))$				
(2, 2)	$(\mu_6(4), \mu_3(2), \mu_2(2), \mu_0(0))$	0	0.5	1	1
(2, 3)	$(\mu_6(5), \mu_3(2), \mu_2(3), \mu_0(1))$	0.5	0.5	0.5	0.5
(2, 4)	$(\mu_6(6), \mu_3(2), \mu_2(4), \mu_0(2))$	1	0.5	0	0.5
(3.5, 2.5)	$(\mu_6(6), \mu_3(3.5), \mu_2(2.5), \mu_0(1))$	1	0.5	0.5	0.5
(3, 2)	$(\mu_6(5), \mu_3(3), \mu_2(2), \mu_0(1))$	0.5	1	1	0.5
(3, 3)	$(\mu_6(6), \mu_3(3), \mu_2(3), \mu_0(0))$	1	1	0.5	1

# Agregació: Introducció

- **Exemple.** Formalització

alternativa	graus de satisfaccio				agregacio			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_3$	$\mathbb{C}_4$
$(x_A, x_B)$								
(2, 2)	0	0.5	1	1				
(2, 3)	0.5	0.5	0.5	0.5				
(2, 4)	1	0.5	0	0.5				
(3.5, 2.5)	1	0.5	0.5	0.5				
(3, 2)	0.5	1	1	0.5				
(3, 3)	1	1	0.5	1				

# Agregació: Introducció

- **Exemple.** Avaluació de les alternatives del curs.

- Vector de pesos (vector possibilístic):  $\mathbf{u} = (1, 0,5, 0,3, 0,1)$ .

- WMin:

- \*  $sat(2,2) = WMin_{\mathbf{u}}(0, 0,5, 1, 1) = 0$

- \*  $sat(2,3) = WMin_{\mathbf{u}}(0,5, 0,5, 0,5, 0,5) = 0,5$

- \*  $sat(2,4) = WMin_{\mathbf{u}}(1, 0,5, 0, 0,5) = 0,5$

- \*  $sat(3,5, 2,5) = WMin_{\mathbf{u}}(1, 0,5, 0,5, 0,5) = 0,5$

- \*  $sat(3,2) = WMin_{\mathbf{u}}(0,5, 1, 1, 0,5) = 0,5$

- \*  $sat(3,3) = WMin_{\mathbf{u}}(1, 1, 0,5, 1) = 0,7$ .

- WMax: (amb  $neg(\mathbf{u}) = (0, 0,5, 0,7, 0,9)$ , segons  $neg(x) = 1 - x$ )

- \*  $sat(2,2) = WMax_{\mathbf{u}}(0, 0,5, 1, 1) = 0,5$

- \*  $sat(2,3) = WMax_{\mathbf{u}}(0,5, 0,5, 0,5, 0,5) = 0,5$

- \*  $sat(2,4) = WMax_{\mathbf{u}}(1, 0,5, 0, 0,5) = 1$

- \*  $sat(3,5, 2,5) = WMax_{\mathbf{u}}(1, 0,5, 0,5, 0,5) = 1$

- \*  $sat(3,2) = WMax_{\mathbf{u}}(0,5, 1, 1, 0,5) = 0,5$

- \*  $sat(3,3) = WMax_{\mathbf{u}}(1, 1, 0,5, 1) = 1$ .

- mínim ponderat, el millor parell és el (3,3), però que, quan utilitzem el màxim ponderat, són indistingibles els parells (2,4) i (3,5, 2,5)

---

# Índex

# Índex

---

- Equacions funcions i síntesis de judicis
- De la mitjana ponderada a les integrals difuses
- Mesures difuses
- Índexs i mètodes d'avaluació
- Selecció del model